La modélisation comme stratégie d’enseignement

Énoncé d'un problème

Pour la fête d'un village, on organise une course cycliste. Une prime totale de 320 € sera repartie entre les trois premiers coureurs. Le premier touchera la prime or, le second la prime argent et le troisième la prime bronze. La prime or s'élève à 70 € de plus que la prime argent et la prime bronze s'élève à 80 € de moins que la prime argent. Déterminer la prime de chacun des trois premiers coureurs.

→ *Photocopie : problème 1*

Mise en activité (1)

- Résoudre ce problème par différentes méthodes.
- Déterminer les notions abordées par ce problème.
- Pour chacune des méthodes de résolution, préciser les savoir-faire mobilisés et le niveau de classe dans lequel ils sont attendus.

Mise en commun (1)

Essais organisés

Niveau : CM

+ 70   - 80

Or	Argent	Bronze	Total
170	100	20	290
200	130	50	380
185	115	35	335
180	110	30	320

+ 30

+ 90

Ici, les essais ont porté sur la prime argent car il s'agit de la référente des deux comparaisons.

Exhaustion des cas

= B2 + 70

	A	B	C	D
1	Or	Argent	Bronze	Total
2	150	80	0	230
3	151	81	1	233
4	152	82	2	236
5	153	83	3	239
6	154	84	4	242
7	155	85	5	245
8	156	86	6	248
9	157	87	7	251
10	158	88	8	254
11	159	89	9	257
12	160	90	10	260
13	161	91	11	263
14	162	92	12	266
15	163	93	13	269
16	164	94	14	272
17	165	95	15	275
18	166	96	16	278
19	167	97	17	281
20	168	98	18	284
21	169	99	19	287
22	170	100	20	290
23	171	101	21	293
24	172	102	22	296
25	173	103	23	299
26	174	104	24	302
27	175	105	25	305
28	176	106	26	308
29	177	107	27	311
30	178	108	28	314
31	179	109	29	317
32	180	110	30	320
33	181	111	31	323

= A2 + B2 + C2

= B2 – 80

Niveau : 5e

Méthode de fausse position (1)

Niveau : CM

- Si la prime argent était de 100 €, alors la prime or serait de 170 €, la prime bronze de 20 € et la prime totale de 290 €. Il manquerait 30 €.
- En ajoutant 10 € à la prime argent, on ajoute 10 € à chacune des primes or et bronze et cela augmente la prime totale de 30 €.
- Donc la prime argent est de 110 €, la prime or de 180 € et la prime bronze de 30 €.

Méthode de fausse position (2)

Niveau : CM

- Si la prime or était de 200 €, alors la prime argent serait de 130 €, la prime bronze de 50 € et la prime totale de 380 €. Il y aurait 60 € de trop.
- En enlevant 20 € à la prime or, on enlève 20 € à chacune des primes argent et bronze et cela diminue la prime totale de 60 €.
- Donc la prime or est de 180 €, la prime argent de 180 € et la prime bronze de 30 €.

Méthode algébrique (1)

Niveau : 4^e

- Nommons x le montant en € de la prime argent.
- La prime or est $x + 70$ et la prime bronze $x - 80$.
- On doit avoir : $x + 70 + x + x - 80 = 320$.
- C'est-à-dire : $3x - 10 = 320$.
- Ou encore : $3x = 330$.
- Ainsi : $x = 110$.
- Finalement la prime or est 180 €, la prime argent 110 € et la prime bronze 30 €.

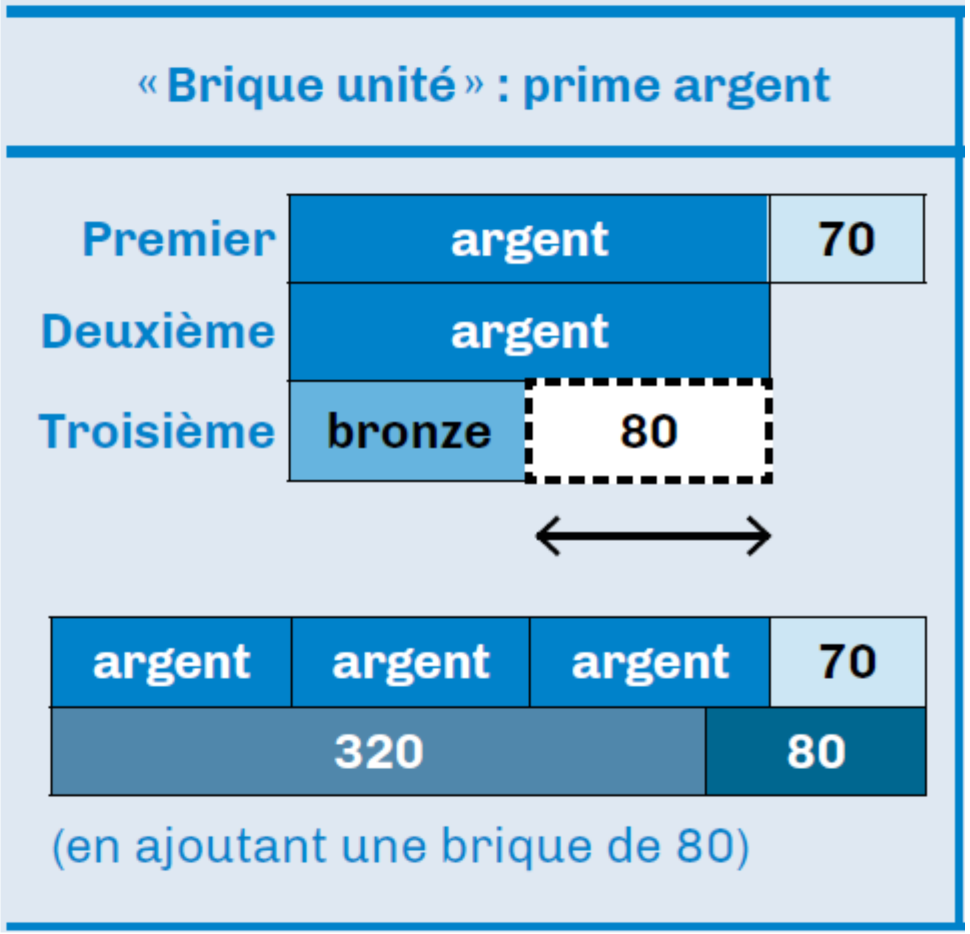
Méthode algébrique (2)

Niveau : 4e

- Nommons y le montant en € de la prime bronze.
- La prime argent est $y + 80$ et la prime or $y + 150$.
- On doit avoir : $y + 150 + y + 80 + y = 320$.
- C'est-à-dire : $3y + 230 = 320$.
- Ou encore : $3y = 90$.
- Ainsi : $y = 30$.
- Finalement la prime or est 180 €, la prime argent 110 € et la prime bronze 30 €.

Schématisation en barres (1)

Niveau : CM

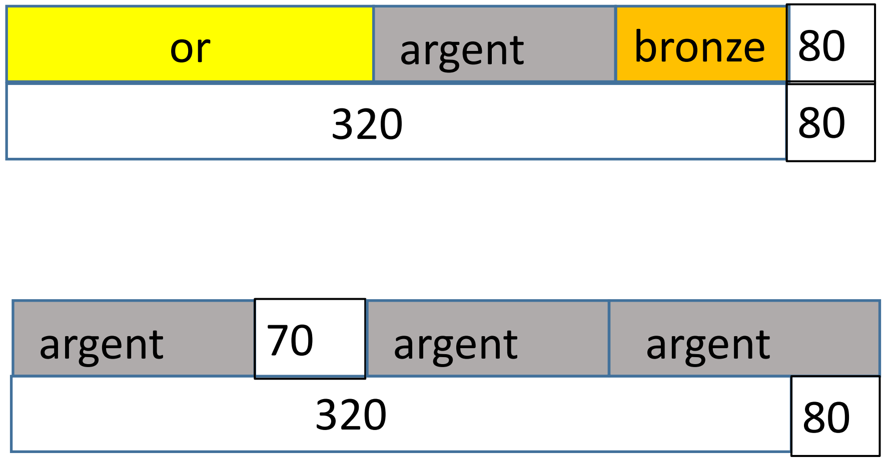


On en déduit que 3 primes argent plus 70 € valent 400 €.
Par conséquent 3 primes argent valent 330 €.
La prime argent s'élève donc à 110 €.
La prime or s'élève à 110 € + 70 € = 180 € et la prime bronze à 110 € - 80 € = 30 €.

Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problème de collège. (2021)

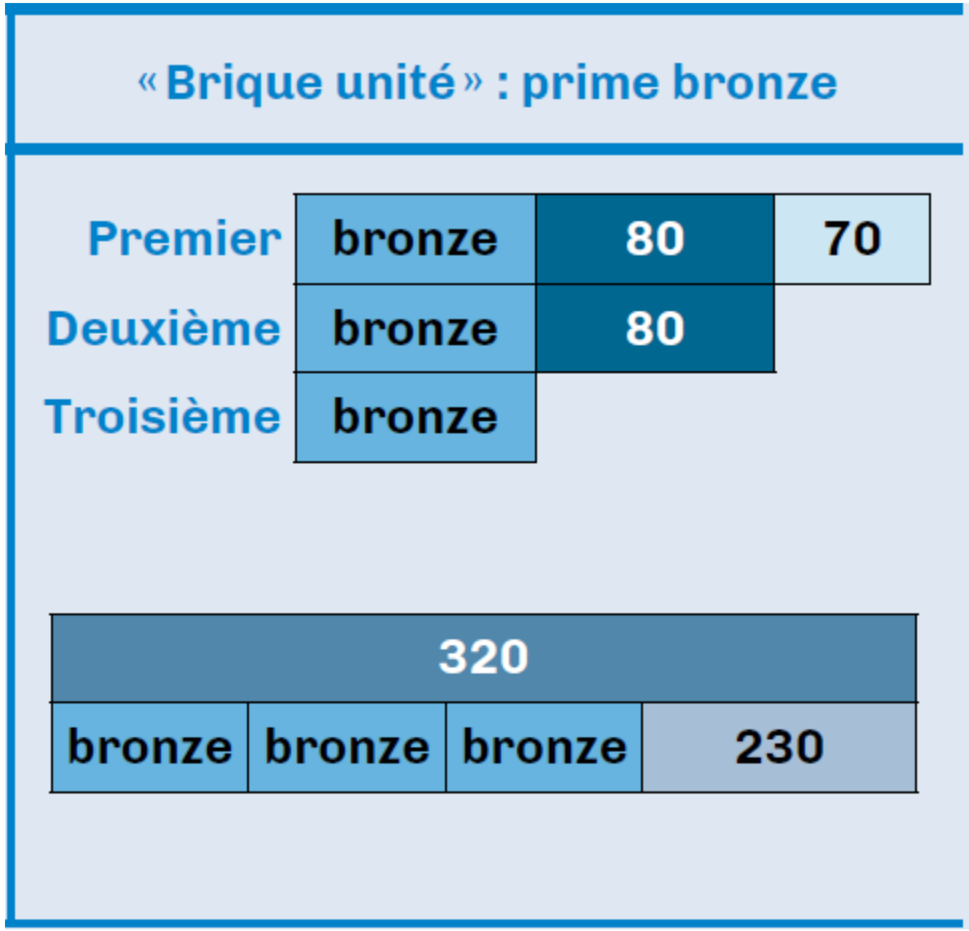
Schématisation en barres (1)

- Dans la diapositive précédente, le passage du premier au second schéma est peut-être difficile d’accès pour élèves.
- Un schéma intermédiaire est peut-être nécessaire.



Schématisation en barres (2)

Niveau : CM



Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problème de collège. (2021)

On en déduit que trois primes bronze plus 230 € valent 320 €.
Par conséquent, trois primes bronze s'élèvent à 90 €.
La prime bronze s'élève donc à 30 €.
La prime argent s'élève à 30 € + 80 € = 110 € et la prime or à 110 € + 70 € = 180 €.

Hiérarchisation des méthodes

Le classement dans l'ordre croissant de l'*efficacité* des méthodes pour résoudre ce problème pourrait être :

- Essais non organisés ;
- Essais organisés ;
- Exhaustion des cas ;
- Schématisation en barres ;
- Fausse position ;
- Méthode algébrique.

Comparaison des méthodes en termes de portée, de fiabilité et d'intelligibilité

- Problème : a parties, $a-1$ comparaisons additives, tout égal à c.
- $ax+b=c$ avec $a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{D},\ c \in \mathbb{D}_+,$ avec $a \geq 2$ et $b \leq c$

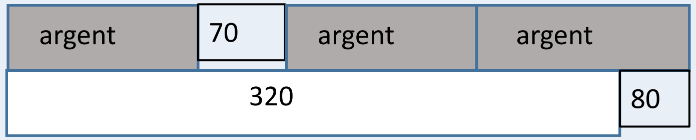
$$x = \frac{c-b}{a}$$

Méthode	Intelligibilité	Fiabilité	Portée
Essais non organisés	Bonne	Liée à l'aisance en calcul numérique	Limitée à entiers
Essais organisés	Bonne	Liée à l'aisance en calcul numérique	Limitée à décimal avec écriture décimale « courte »
Exhaustion des cas	Bonne	Liée à l'aisance dans l'utilisation du tableur	Limitée à décimal avec écriture décimale « relativement courte »
Fausse position	*	Liée à l'aisance en calcul numérique	Limitée aux cas où est divisible par
Schématisation en barres	À construire	Liée à la distinction entre comparaison positives et négatives	Limitée aux cas où est petit
Méthode algébrique	À construire	Liée à l'aisance en calcul littéral	Totale

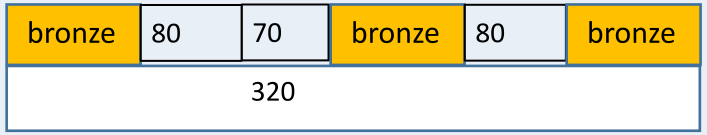
* Liée à la compréhension de l'ajustement.

Correspondance entre schématisation en barres et méthode algébrique (1)

<table>
<tr><th>Schématisation en barres</th><th>Méthode algébrique</th></tr>
<tr><td>Choix de la brique unité :

</td><td>Choix de l’inconnue : Nommons le montant en € de la prime argent.</td></tr>
<tr><td>Construction du schéma :

</td><td>Mise en équation :</td></tr>
<tr><td>Recherche de la valeur de la brique unité :
Trois primes argent plus 70 € valent 400 €.
Trois primes argent valent 330 €.
La prime argent s’élève à 110 €.</td><td>Résolution algébrique de l’équation :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Retour à la situation :
La prime or s’élève à 110 € + 70 € = 180 € et la prime bronze à 110 € - 80 € = 30 €.</td></tr>
</table>

Correspondance entre schématisation en barres et méthode algébrique (2)

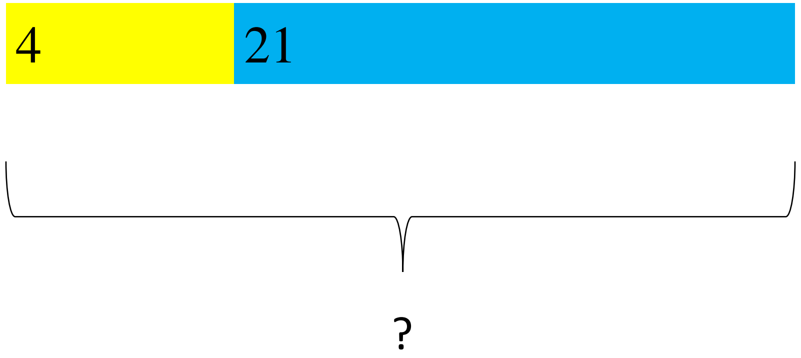
Schématisation en barres	Méthode algébrique
Choix de la brique unité : 	Choix de l'inconnue : *Nommons le montant en € de la prime bronze.*
Construction du schéma : 	Mise en équation :
Recherche de la valeur de la brique unité : *Trois primes bronze plus 230 € valent 320 €.* *Trois primes bronze s'élèvent à 90 €.* *La prime bronze s'élève donc à 30 €.*	Résolution algébrique de l'équation :
Retour à la situation : La prime argent s'élève à 30 € + 80 € = 110 € et la prime or à 110 € + 70 € = 180 €.	

Schématisation en barres

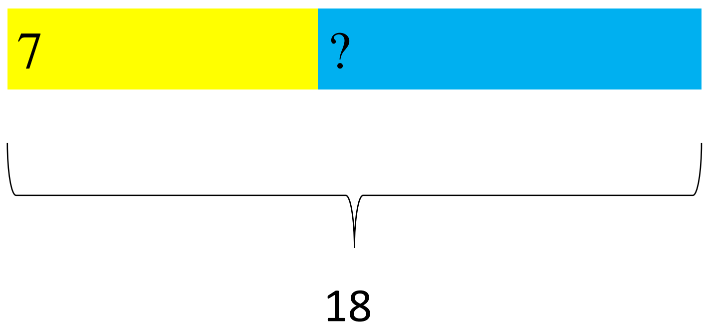
Apports théoriques

Principe : Association nombre – longueur pour représenter les opérations

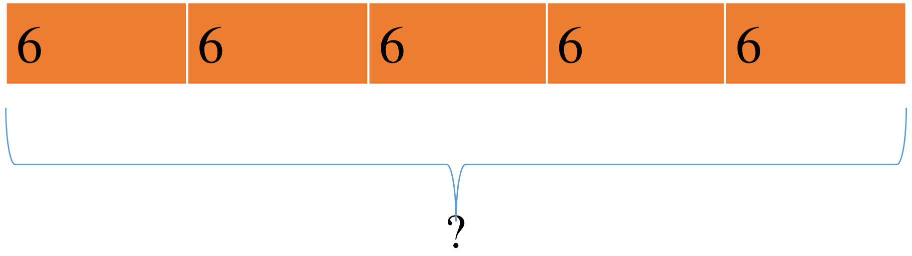
L'**addition** de deux nombres est représentée par la longueur de la bande obtenue en juxtaposant deux bandes. La somme peut être vue tout aussi bien comme le résultat d'une réunion ou d'un ajout.

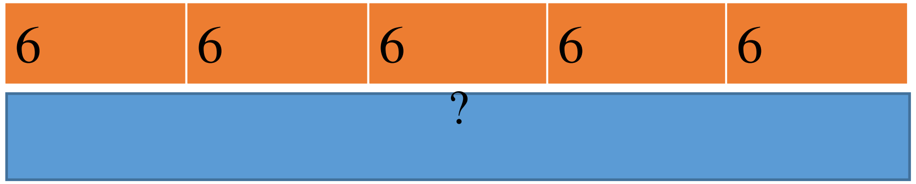


La **soustraction** est représentée par une addition à trous. La différence peut être vue tout aussi bien comme un reste après un retrait ou comme un complément lors d'une disjonction. Pour représenter un écart, on utilisera deux bandes.



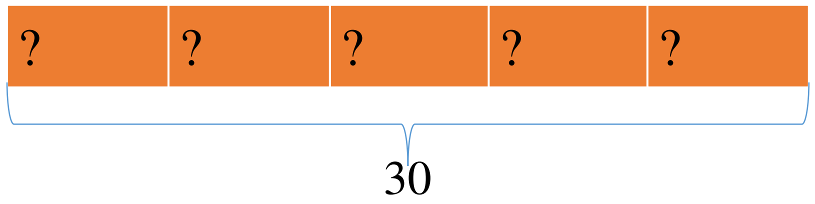
La **multiplication** est représentée par une addition itérée.

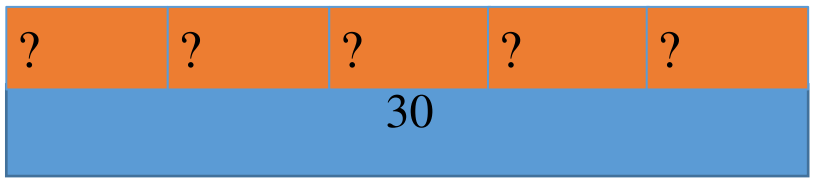




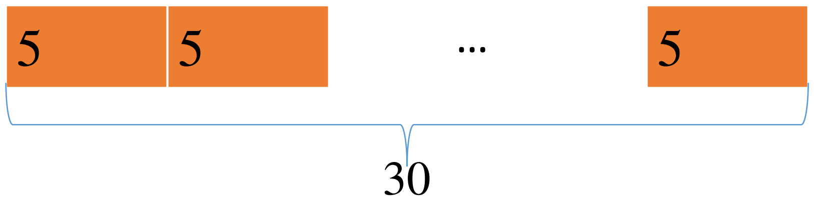
La commutativité de la multiplication n’est pas perceptible

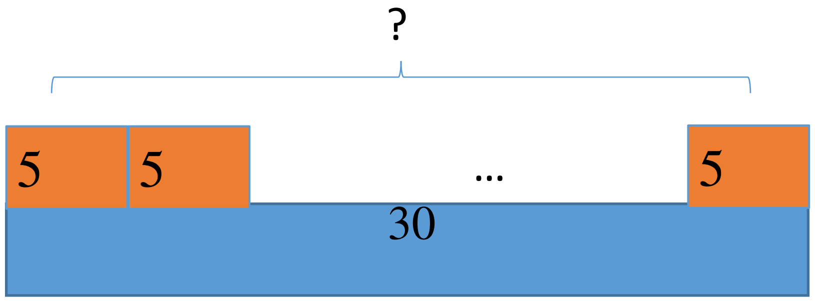
La **division** est représentée comme une multiplication à trous. Elle est ainsi perçue plus naturellement comme un partage que comme un groupement.





Pour y voir un groupement, il faut utiliser un artifice de représentation.





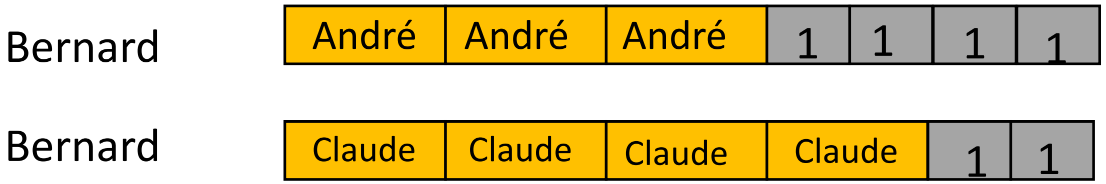
- La schématisation en barres peut être assez naturellement utilisée dans la résolution de problèmes parties-tout (additifs ou multiplicatifs) et de problèmes de comparaison (additives ou multiplicatives).
- La schématisation en barres est une aide à la modélisation, un intermédiaire entre mode iconique et mode symbolique. Certains élèves n’en auront pas besoin.
- La schématisation ne doit jamais être imposée lors de la résolution d’un problème, mais peut l’être à l’occasion d’un travail spécifique.

Exemple

Bernard a trois fois l'âge d'André plus 4 ans et il a 4 fois l'âge de Claude plus 2 ans. André et Claude ont le même âge. Quel est l'âge de Bernard ?

Au cycle 4, la résolution de ce problème s'effectue au moyen de l'algèbre et la résolution de l'équation $3x + 4 = 4x + 2$ dans laquelle l'inconnue x désigne l'âge d'André (ou de Claude)

Au cycle 3, ce problème peut être résolu par essais et ajustements ou à l'aide de la schématisation en barres.



Par comparaison des deux *expressions* de l'âge de Bernard, on en déduit qu'une barre orange (l'âge d'André ou celui de Claude) correspond à 2 ans, puis que Bernard a 10 ans.

- La construction du schéma est aussi difficile (parfois même plus) que la mise en équation mais elle prépare (au même titre que le tableur) à l'écriture littérale.
- La résolution schématique de l'équation est ici plus fiable que sa résolution algébrique car la simple comparaison visuelle des deux *expressions* permet de déterminer la valeur de l'*inconnue.*

Énoncé d’un problème

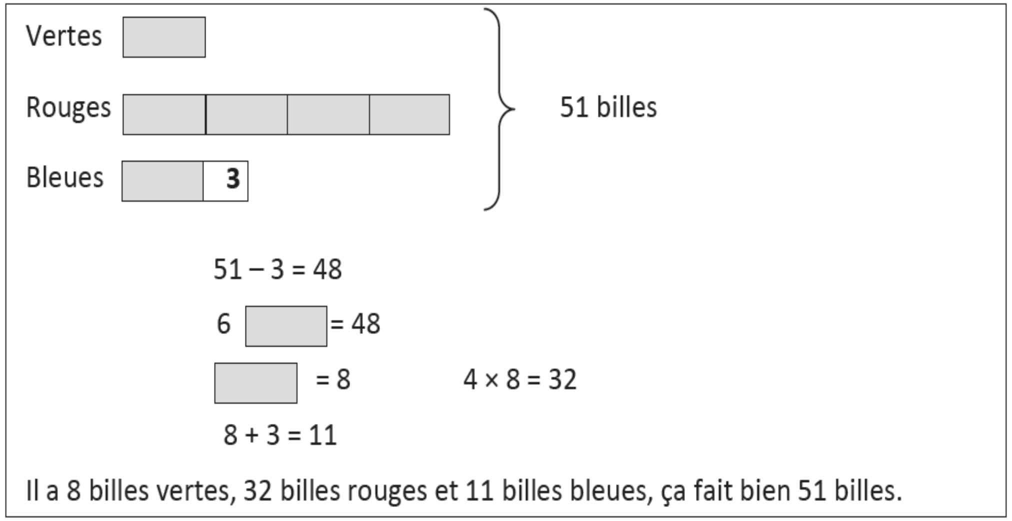
Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues. En tout il a 51 billes. Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?

→ *Photocopie : problème 2*

D’après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, Ministère de l’éducation nationale, 2021.

Mise en activité (2)

Voici la réponse proposée par une élève de CM2.

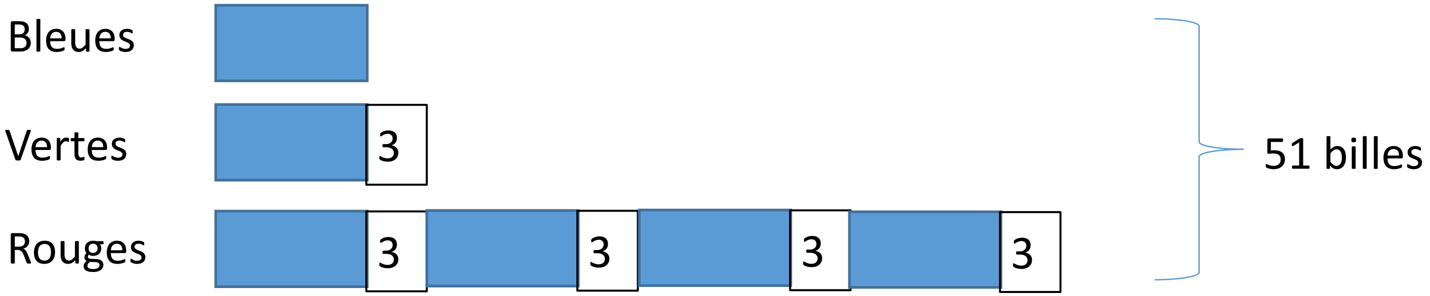


Proposer une version corrigée du schéma utilisé par cette élève pour résoudre le problème.

Mise en commun (2)

Mise en commun :

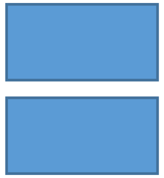
La modélisation réalisée par Samira est erronée car l'enfant n'a pas 3 billes bleues de plus que de billes vertes mais « 3 billes vertes de plus que de billes bleues. »



$5 \times 3 = 15$

$51 - 15 = 36$

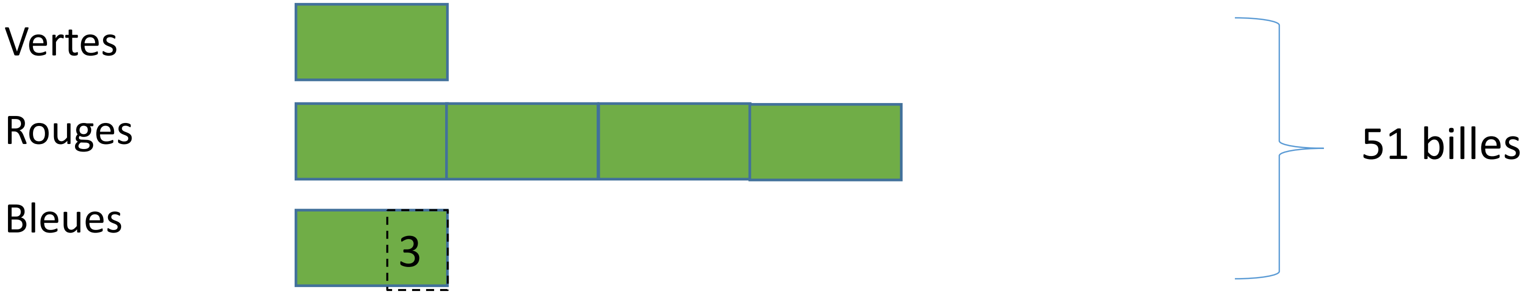
$6 \qquad = 36$



$= 6$

Il a 6 bleues, $6 + 3 = 9$ vertes et $4 \times 9 = 36$ rouges.

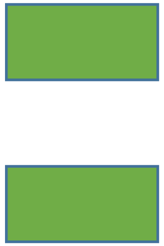
Autre possibilité



$51 + 3 = 54$

$6 \qquad = 54$

$= 9$



Il a 9 vertes, $4 \times 9 = 36$ rouges et $9 - 3 = 6$ bleues.

Mise en activité (3)

- Résoudre le problème qui vous est confié en utilisant la schématisation en barres.
- Déterminer les notions mathématiques et les savoir-faire mobilisés par la résolution de ce problème au moyen de la schématisation en barres.
- Préciser le niveau de classe auquel ce problème pourrait être proposé.

→ *Photocopie : problème 3A ou 3B ou 3C ou 3D ou 3E*

Problème 3A

Je pense à un nombre, je le double, j'ajoute deux septièmes du nombre de départ et j'obtiens 376. Quel était le nombre de départ ?

Problème 3B

Le Grand-Duc de York a conduit ses hommes au sommet de la montagne. À 14 h 00, ils avaient parcouru un tiers du chemin. À 14 h 50, ils en avaient parcouru 75 %. À quelle heure ont-ils commencé leur marche ?

Problème 3C

Je dépense quatre septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €. Combien avais-je d'économies au départ ?

Problème 3D

Avec 3,8 L d'eau on remplit exactement un verre, un bol et une bouteille. La contenance du bol est le triple de celle du verre et cinq fois moins grande que celle de la bouteille. Quelle est la contenance du bol ?

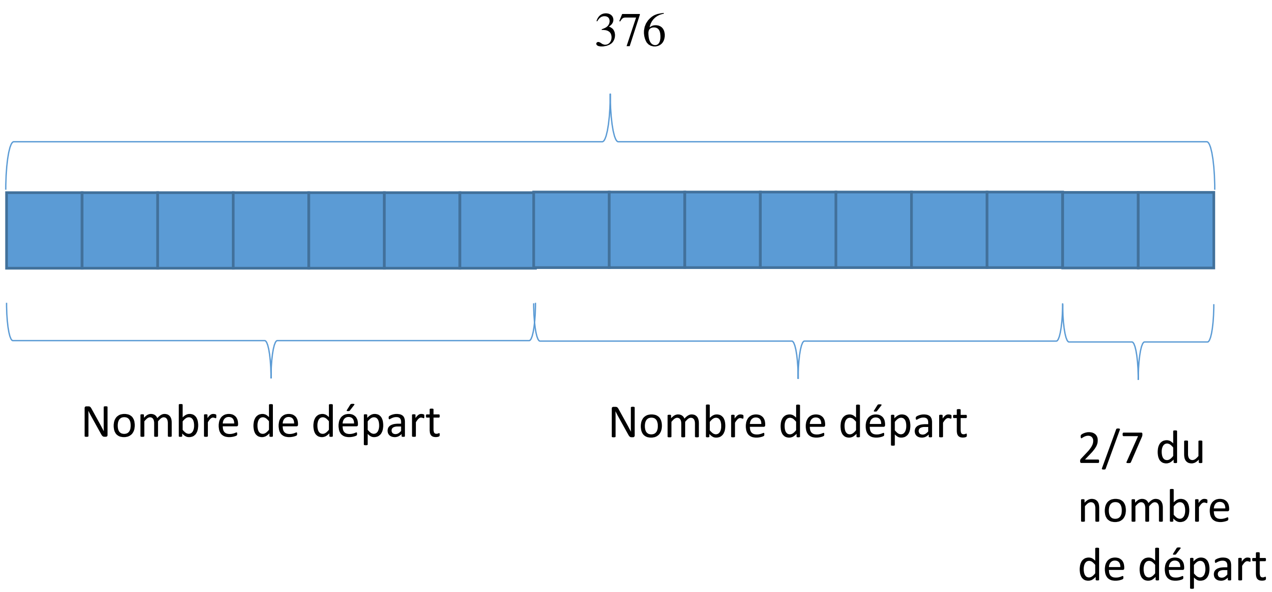
Problème 3E

Mandy et Simon ont réalisé un certain nombre de macarons dans le ratio 8 : 5. Mandy, plus expérimentée, a fait 66 macarons de plus que Simon. Combien en ont-ils préparés en tout ?

Mise en commun (3)

Problème 3A

Je pense à un nombre, je le double, j'ajoute deux septièmes du nombre de départ et j'obtiens 376. Quel était le nombre de départ ?



On en déduit que :

$16 \qquad = 37$

$\square = 376 \div 16 = 23{,}5$

Donc le nombre de départ est

$7 \times 23{,}5 = 164{,}5.$

Problème 3B

Le Grand-Duc de York a conduit ses hommes au sommet de la montagne. À 14 h 00, ils avaient parcouru un tiers du chemin. À 14 h 50, ils en avaient parcouru 75 %. À quelle heure ont-ils commencé leur marche ?

On en déduit que :

$$5\ \square = 50 \text{ min}$$

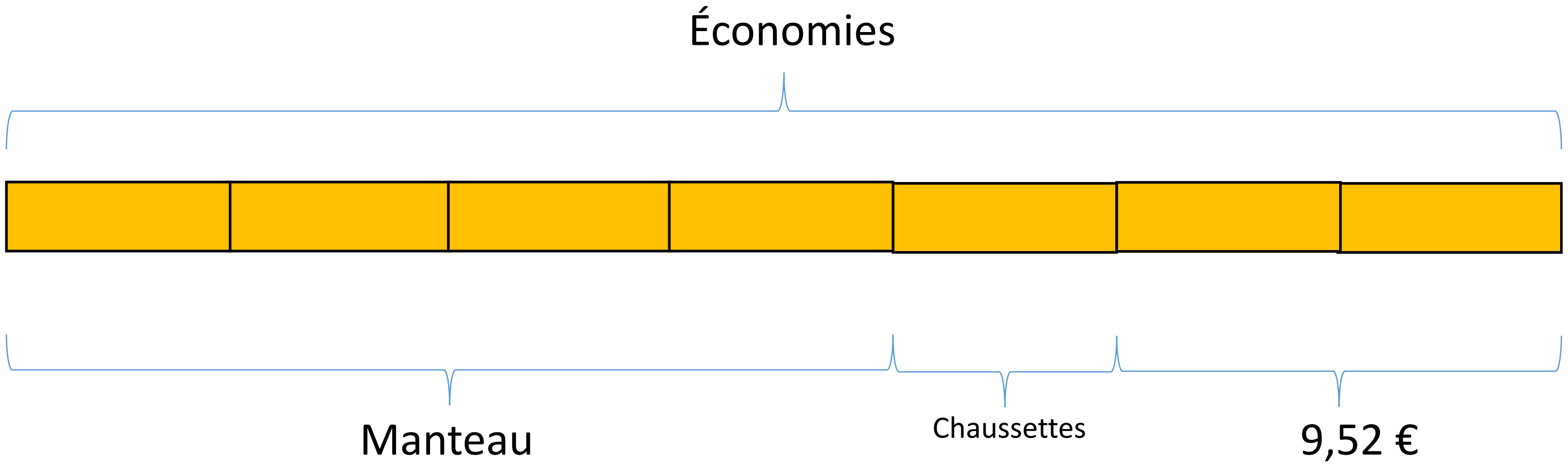
$$\square = 50 \text{ min} \div 5 = 10 \text{ min}$$

$$4\ \square = 10 \text{ min} \times 4 = 40 \text{ min}$$

La marche a commencé à $14 \text{ h } 00 - 40 \text{ min} = 13 \text{ h } 20$.

Problème 3C

Je dépense quatre septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €. Combien avais-je d'économies au départ ?



$$2\ \boxed{} = 9{,}52\ €$$

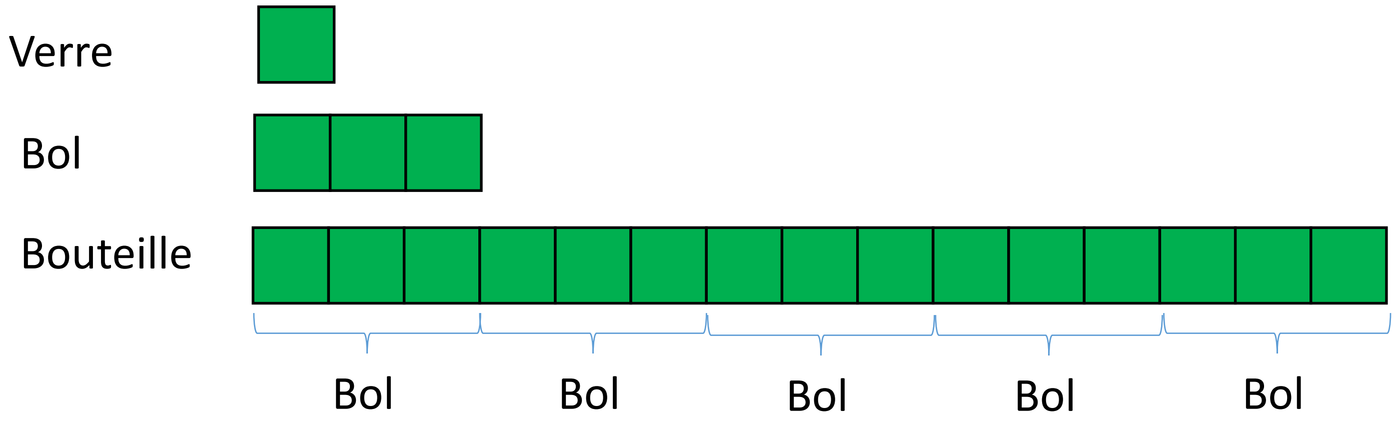
$$\boxed{} = 9{,}52\ € \div 2 = 4{,}76\ €$$

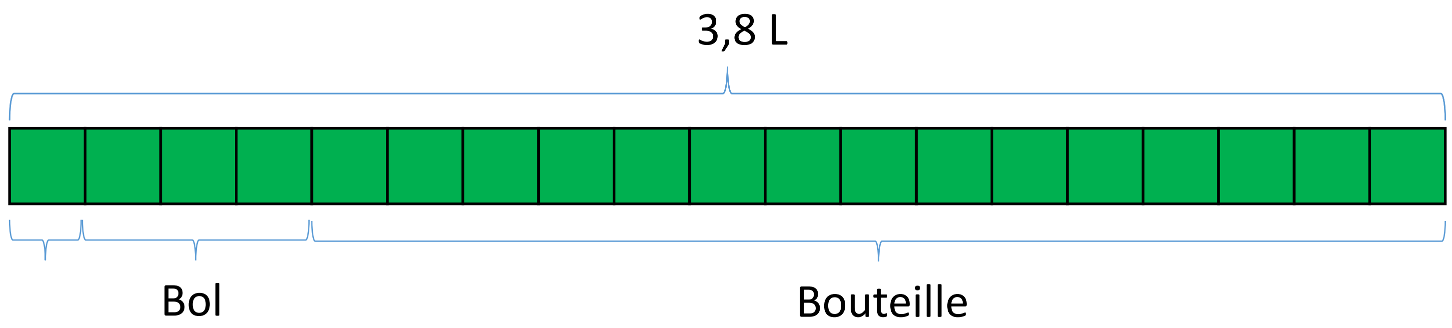
$$7\ \boxed{} = 7 \times 4{,}76\ € = 33{,}32\ €$$

Au départ, j'avais 33,32 €.

Problème 3D

Avec 3,8 L d'eau on remplit exactement un verre, un bol et une bouteille. La contenance du bol est le triple de celle du verre et cinq fois moins grande que celle de la bouteille. Quelle est la contenance du bol ?





$19\ \square = 3{,}8\ \mathrm{L}$

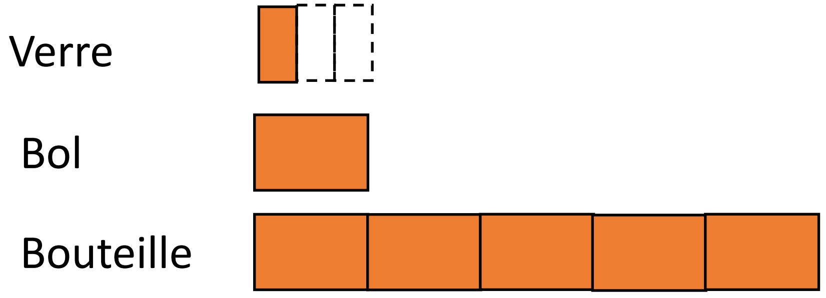
$\square = 3{,}8\ \mathrm{L} \div 19 = 0{,}2\ \mathrm{L}$

$3\ \square = 3 \times 0{,}2\ \mathrm{L} = 0{,}6\ \mathrm{L}$.

La contenance du bol est 0,6 L.

Problème 3D

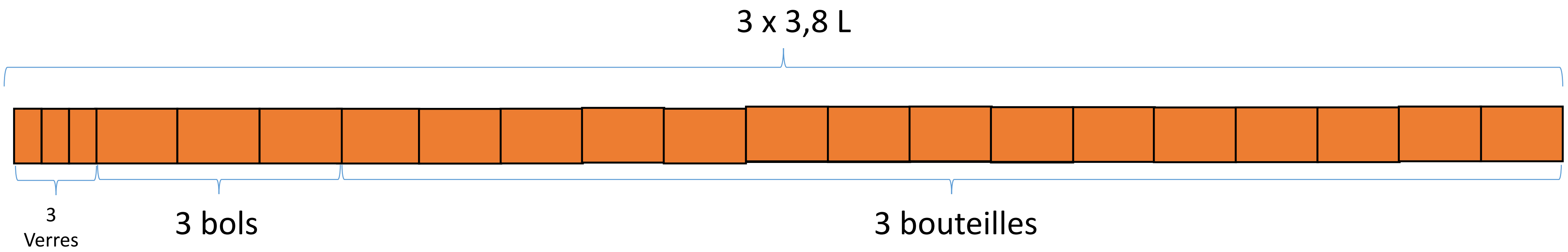
Avec 3,8 L d'eau on remplit exactement un verre, un bol et une bouteille. La contenance du bol est le triple de celle du verre et cinq fois moins grande que celle de la bouteille. Quelle est la contenance du bol ?



$$19\ \square = 3 \times 3{,}8\text{ L} = 11{,}4\text{ L}$$

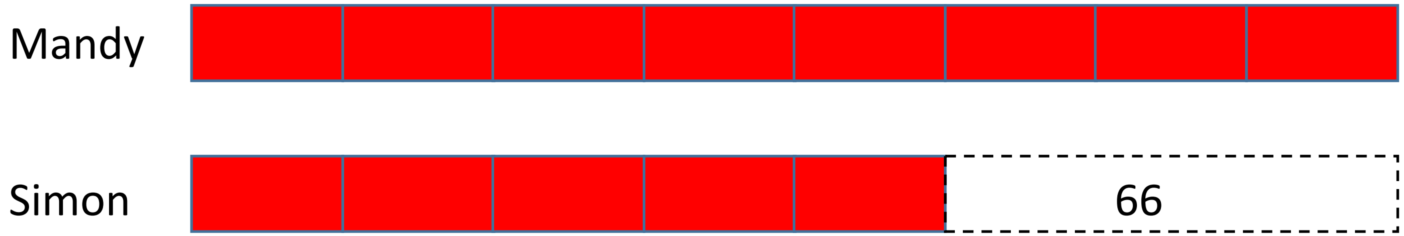
$$\square = 11{,}4\text{ L} \div 19 = 0{,}6\text{ L}$$

La contenance du bol est 0,6 L.



Problème 3E

Mandy et Simon ont réalisé un certain nombre de macarons dans le ratio 8 : 5. Mandy, plus expérimentée, a fait 66 macarons de plus que Simon. Combien en ont-ils préparés en tout ?



On en déduit que :

$$3\,\blacksquare = 66$$

$$\blacksquare = 66 \div 3 = 22$$

$$13\,\blacksquare = 13 \times 22 = 286$$

Ensemble, Mandy et Simon ont préparé 286 macarons.

Analyse a priori d’un problème

Mise en activité (4)

Analyser le problème dont l'énoncé figure dans l'encadré ci-dessous en vue de le proposer dans l'une de vos classes.

→ *Photocopie : problème 4*

EFG est un triangle tel que EF=5 EG=7 FG=9 (en cm)
M ∈ [EF] et on pose EM=x
N ∈[EG] et tel que (MN)//(FG)
1) Exprimer EN et MN en fonction de x
2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

Mise en commun (4)

Difficultés

- « Exprimer en fonction de »
- Le trapèze est traditionnellement peu étudié au collège. Il s'agit de le reconnaître sans démonstration.
- Ordre des contraintes sur le point N .
- x a tout d'abord un statut de variable, et ensuite celui d'inconnue.

Aides

- Quelqu'un peut-il expliquer ce que cela signifie ? Ce qui est attendu ?
- « Quadrilatère » aurait parfaitement convenu !
- Proposer un énoncé avec les contraintes dans le bon ordre ou demander « Peut-on placer le point N n'importe où sur le segment [EG] ? »
- Plutôt que *calculer* ici, il s'agit davantage de *déterminer*.

EFG est un triangle tel que EF=5 EG=7 FG=9 (en cm)
M ∈ [EF] et on pose EM=x
N ∈[EG] et tel que (MN)//(FG)
1) Exprimer EN et MN en fonction de x
2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

Quelle bonne pratique pour commencer dans ce type de situation ?

EFG est un triangle tel que EF=5 EG=7 FG=9 (en cm)
M ∈ [EF] et on pose EM=x
N ∈[EG] et tel que (MN)//(FG)
1) Exprimer EN et MN en fonction de x
2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

Erreurs

- De mauvais rapports
- Des expressions de EN et MN erronées
- Confusion entre EN et GN et entre EM et MF dans l'établissement de la formule du périmètre.
- Erreur de calcul avec les écritures fractionnaires pour la résolution de l'équation.

Aides

- Représenter une configuration analogue avec les noms des points habituels O, A, B, C et D.
- Retour à l'égalité des produits en croix.
- Avez-vous pensé à enrichir la figure des renseignements que vous avez obtenus ?
- Le nombre 7/5 est-il décimal ? Connaissez-vous une autre écriture du nombre 7/5 ?

Procédures

EFG est un triangle tel que EF=5 EG=7 FG=9 (en cm)
M ∈ [EF] et on pose EM=x
N ∈[EG] et tel que (MN)//(FG)
1) Exprimer EN et MN en fonction de x
2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

1) Exprimer EN et MN en fonction de x

- Théorème de Thalès
- Triangles semblables
- Agrandissement/réduction

2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

- Résolution algébrique d'une équation avec écritures décimales ($21 - 0{,}6x = 19{,}8$)
- Résolution algébrique d'une équation avec écritures fractionnaires ($21 - \frac{3x}{5} = 19{,}8$)
- Résolution par essais et ajustements

Hiérarchie des procédures

1)Exprimer EN et MN en fonction de x

Les trois procédures évoquées plus haut sont proches les unes des autres (la configuration de Thalès est un cas particulier de deux triangles semblables). La traduction de l'égalité des rapports en termes d'agrandissement-réduction est difficile ici car le coefficient $\frac{x}{5}$ est *variable* mais elle simplifie le traitement.

i. L'énoncé assure immédiatement que les conditions de l'utilisation du théorème de Thalès sont bien remplies.

ii. Triangles semblables (angles correspondants + utilisation de la propriété caractéristique)

iii. Agrandissement-réduction (angles correspondants + coefficient de réduction $\frac{x}{5}$)

2) Calculer x afin que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8 cm

i. Résolution par essais et ajustements (habituellement lente, mais pas ici)

ii. Résolution algébrique d'une équation avec écritures décimales ($21 - 0{,}6x = 19{,}8$)

iii. Résolution algébrique d'une équation avec écritures fractionnaires ($21 - \frac{3x}{5} = 19{,}8$ est équivalente $105 - 3x = 99$)

Différenciation

- Des questions intermédiaires supplémentaires :
  - Construire le triangle EFG en vraie grandeur. On note p la mesure en cm du périmètre du quadrilatère MFGN.
  - Montrer que si $x = 2{,}5$ alors $p = 19{,}5$.
  - Montrer que si $x = 1$ alors $p = 20{,}4$
  - x est maintenant un nombre quelconque compris entre 0 et 5
    - Justifier la double égalité $\frac{EN}{7} = \frac{x}{5} = \frac{MN}{9}$.
    - En déduire une expression de EN en fonction de x et une expression de MN en fonction de x.
    - Montrer que $p = 21 - 0{,}6x$.
    - Pour quelle valeur de x a-t-on $p = 19{,}8$?

théorème des milieux

- Pas de question 1).
- Rédiger un programme de construction de la figure.
- EF = 6. Déterminer x pour que p(MNFG) = 20 (variable didactique → utilisation des écritures fractionnaires, calcul avec les fractions.)

T.I.C.E.

Logiciel de géométrie dynamique :

0) Construction « classique » du triangle EFG. Un curseur pour $x \in [0;5]$ ou un point sur un objet pour le point mobile M.

1) a disparu (plus besoin d'exprimer EN et MN en fonction de x, car la mise en équation est inutile)

2) se fait par essais et ajustements de points (en déplaçant le curseur ou le point mobile)

Avec tableur :

0) et 1) restent de mise

2) Résolution de l'équation par essais de nombres et ajustements.

Difficultés liées au passage du formalisme algébrique aux formules du tableur.

Deux (x et p(x)) ou quatre (EM, EN, MN, p(MNFG)) colonnes

Synthèse

Narration de recherche

- Pour résoudre ce problème on a :
  - représenté la figure à main levée ;
  - utilisé le théorème de Thalès pour exprimer des longueurs en fonction de la variable x ;
  - résolu une équation.

Prolongement(s)

- L'existence d'une solution est assurée par l'inégalité triangulaire qui fournit $18 < p < 21$ (la continuité de la fonction $x \mapsto p(x)$ est *naturelle*)
- L'unicité de la solution est assurée par la décroissance de la fonction $x \mapsto p(x)$ (qui est perceptible sur la figure et justifiable géométriquement).
- Grâce au théorème des milieux, une conjecture est possible : $x < 2{,}5$.
- Déterminer x pour que p(MNFG) = 22 ou 16 (pas de solution dans [0 ; 5]).

Canevas pour l'analyse a priori d'un problème

Il s'agit pour l'enseignant d'analyser l'énoncé et la résolution d'un problème qu'il projette de proposer à ses élèves dans le but de préparer la mise en œuvre en classe. L'analyse *a priori* peut être effectuée en répondant aux questions suivantes :

- Quelle(s) difficulté(s) les élèves vont ils rencontrer dans la compréhension de l'énoncé ?
- Quelle(s) erreur(s) des élèves l'enseignant peut-il anticiper ?
- Quelles aide(s) (sous forme de question cruciale formulée par l'enseignant) permettront aux élèves de surmonter ces difficultés ou de comprendre et dépasser ces erreurs ?
- Quelle(s) procédure(s) de résolution de ce problème les élèves sont-ils censés suivre ?
- Quelle hiérarchie des procédures (selon les critères intelligibilité, fiabilité, portée, rapidité) peut être établie en vue de la mise en commun ?
- Quel(s) élément(s) de différenciation (variables didactiques) pour permettre à tous les élèves de progresser ?
- Quels apports éventuels des T.I.C.E. à la résolution de ce problème ?
- Quelle synthèse effectuer à l'issue de la résolution de ce problème ?
- Quel(s) prolongements du problème pour asseoir la technique de résolution découverte ?

Mise en activité (5)

Analyser le problème dont l'énoncé figure dans l'encadré ci-dessous en en suivant le canevas précédent.

→ *Photocopie : problème 5*

Un guépard s'est approché à 50 m d'une jeune antilope. Il s'élance sur sa proie en courant à 100 km/h. Au même instant, l'antilope s'enfuit à 75 km/h. On suppose que la trajectoire des deux animaux est une même droite. Quelle distance doit parcourir le guépard pour rattraper l'antilope ?

Mise en commun (5)

Difficultés	Aides
• Les grandeurs en jeu ne sont pas nommées.	• Modifier l’énoncé en précisant « distance de 50 m », « à une vitesse de 100 km/h » ou demander de quels types sont les grandeurs 50 m et 100 km/h.
• Les positions initiales ne sont pas indiquées.	• Poser la question « Où se trouvent l’antilope et le guépard au départ ? » pour amener les élèves à comprendre que les positions absolues n’ont pas d’importance (seules leurs positions relatives en ont) et à schématiser la situation.
• Ne pas comprendre l’implicite « s’enfuit ».	• Poser la question « Dans quels sens partent l’antilope et le guépard ? »
• Ne pas savoir exprimer les positions en fonction du temps.	• Poser les questions « Où se trouve le guépard au bout d’une heure ? Au bout de deux heures ? Au bout de t heures ? » Suggérer d’autres méthodes (distances parcourues, écart entre les animaux).
• Ne pas réussir la mise en équation.	• Puisque sa vitesse est connue, pour déterminer la distance parcourue par le guépard il suffit de connaître la durée de sa course. Comment traduire « Le guépard a rattrapé l’antilope » ? « Quand la course s’arrête-elle ? »
• Écart relatif important entre les données et la solution.	• Adapter les données de l’exercice ?

Erreurs

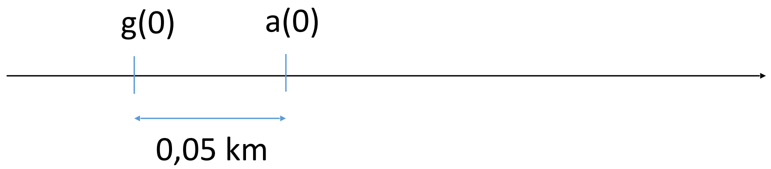
- Absence de conversion m → km ou conversion erronée.
- Résultats invraisemblables

Aides

- Conserver les unités dans les calculs pour s'assurer de la cohérence de celles-ci.
- Poser la question « La course peut-elle durée 1 h ? » ou « L'ordre de grandeur de la durée de la course est-il celui de la seconde ou celui de l'heure ? »

Procédure basée sur les positions

- Munir la droite représentant la trajectoire des deux animaux d'un repère d'origine la position du guépard à l'instant $(t = 0)$ auquel il s'élance et d'unité $1\ \mathrm{km}$.



- Exprimer les abscisses du guépard et de l'antilope en fonction de la durée t (en h) de la course : $g(t) = 100t$ et $a(t) = 0{,}05 + 75\ t$.
- Déterminer la durée T de la course solution de l'équation $a(t) = g(t)$: $\mathrm{T} = 0{,}002\ \mathrm{h}$.
- Calculer la distance parcourue par le guépard $g(T) = \mathrm{g}(0{,}002) = 0{,}2$.
- Conclure : pour rattraper l'antilope le guépard doit parcourir 200 m.

Procédure basée sur les distances parcourues

- Exprimer les distances parcourues par le guépard et l'antilope en fonction de la durée t (en h) de la course : $g(t) = 100t$ et $a(t) = 75t$.
- Déterminer la durée T de la course solution de l'équation $g(t) = a(t) + 0{,}05$: $\mathrm{T} = 0{,}002\,\mathrm{h}$
- Calculer la distance parcourue par le guépard $g(T) = \mathrm{g}(0{,}002) = 0{,}2$.
- Conclure : pour rattraper l'antilope le guépard doit parcourir 200 m.

Procédure basée sur l'écart entre les animaux

- La distance séparant le guépard et l'antilope diminue de 25 km en une heure, c'est à dire de 250 m en 36 secondes, ou encore de 50 m en 7,2 secondes.

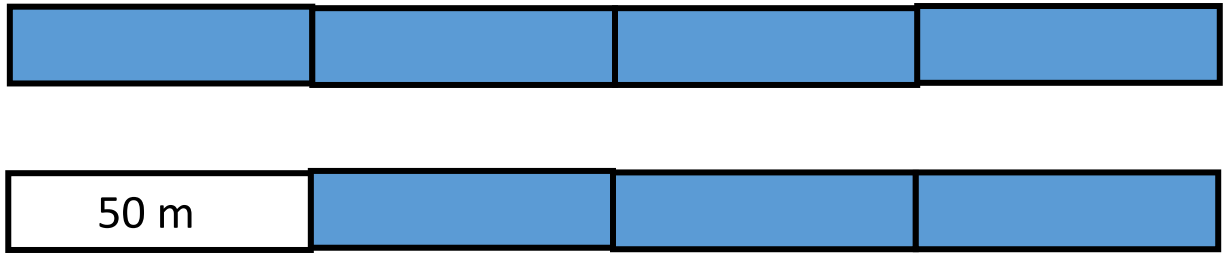
Distance G-A	25 km	25 000 m	250 m	50 m
Durée	1 h	3 600 s	36 s	7,2 s

- Pour rattraper l'antilope le guépard doit donc parcourir la distance :

$$d = v \times t = 100 \text{ km/h} \times \frac{7{,}2}{3600} \text{ h} = 0{,}2 \text{ km}$$

Schématisation en barres

Distance parcourue par le guépard



Distance parcourue par l'antilope

Les distances parcourues par le guépard et l'antilope sur un même laps de temps sont dans le même ratio que leurs vitesses respectives c'est-à-dire 4 : 3.

- On constate que  $= 50$ m.
- La distance parcourue par le guépard est 4×50 m $= 200$ m.

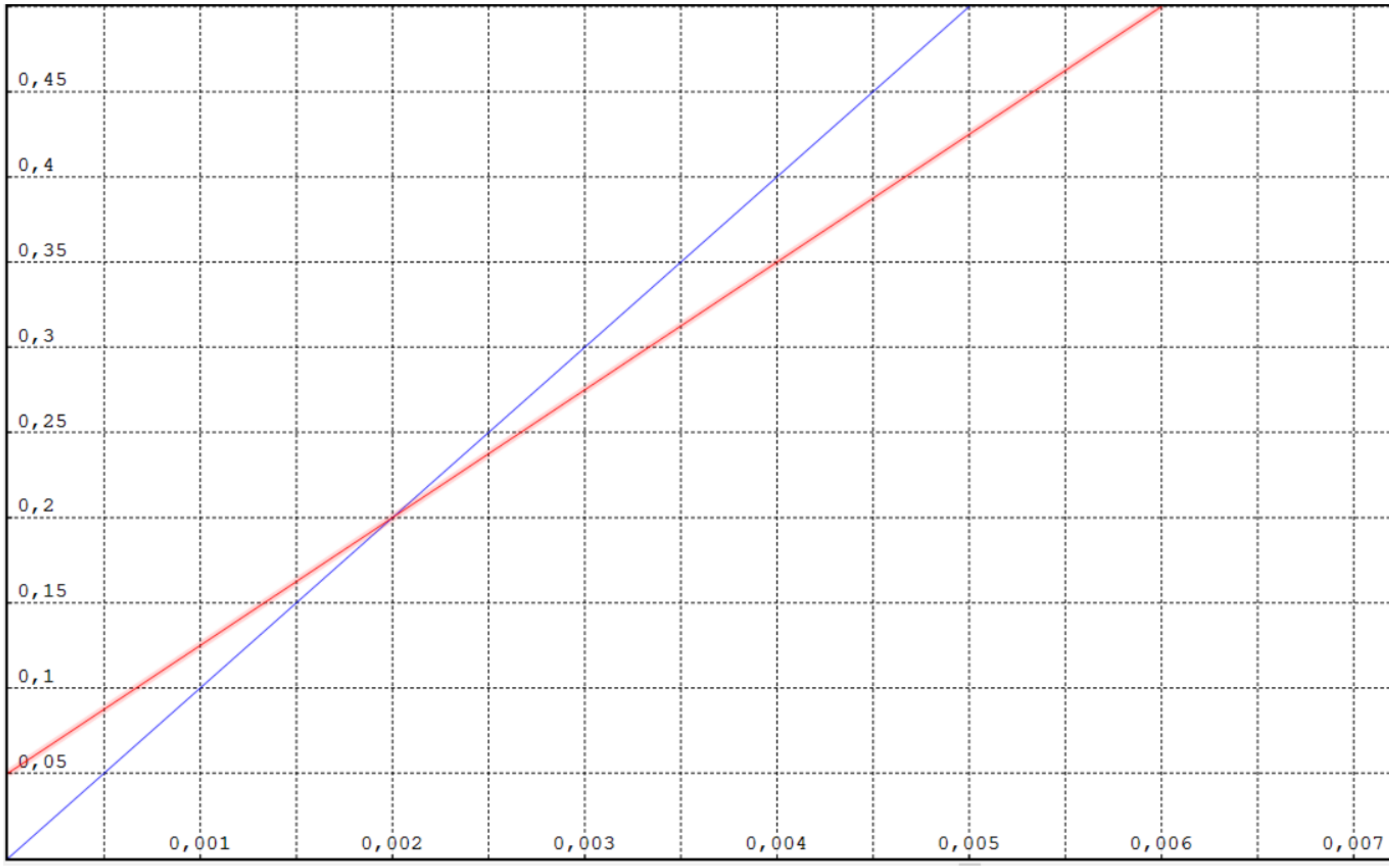
Résolution algébrique de l'équation

Positions	Distances parcoures	Écart
$g(t) = 100t$ et $a(t) = 0{,}05 + 75t$ $\boldsymbol{g(t) = a(t)}$ $100t = 0{,}05 + 75t$ $25t = 0{,}05$ $t = 0{,}002$	$g(t) = 100t$ et $a(t) = 75t$ $\boldsymbol{g(t) = a(t) + 0,05}$ $100t = 75t + 0{,}05$ $25t = 0{,}05$ $t = 0{,}002$	$é(t) = 0{,}05 - 25t$ $\boldsymbol{é(t) = 0}$ $0{,}05 - 25t = 0$ $25t = 0{,}05$ $t = 0{,}002$

Résolution numérique de l'équation

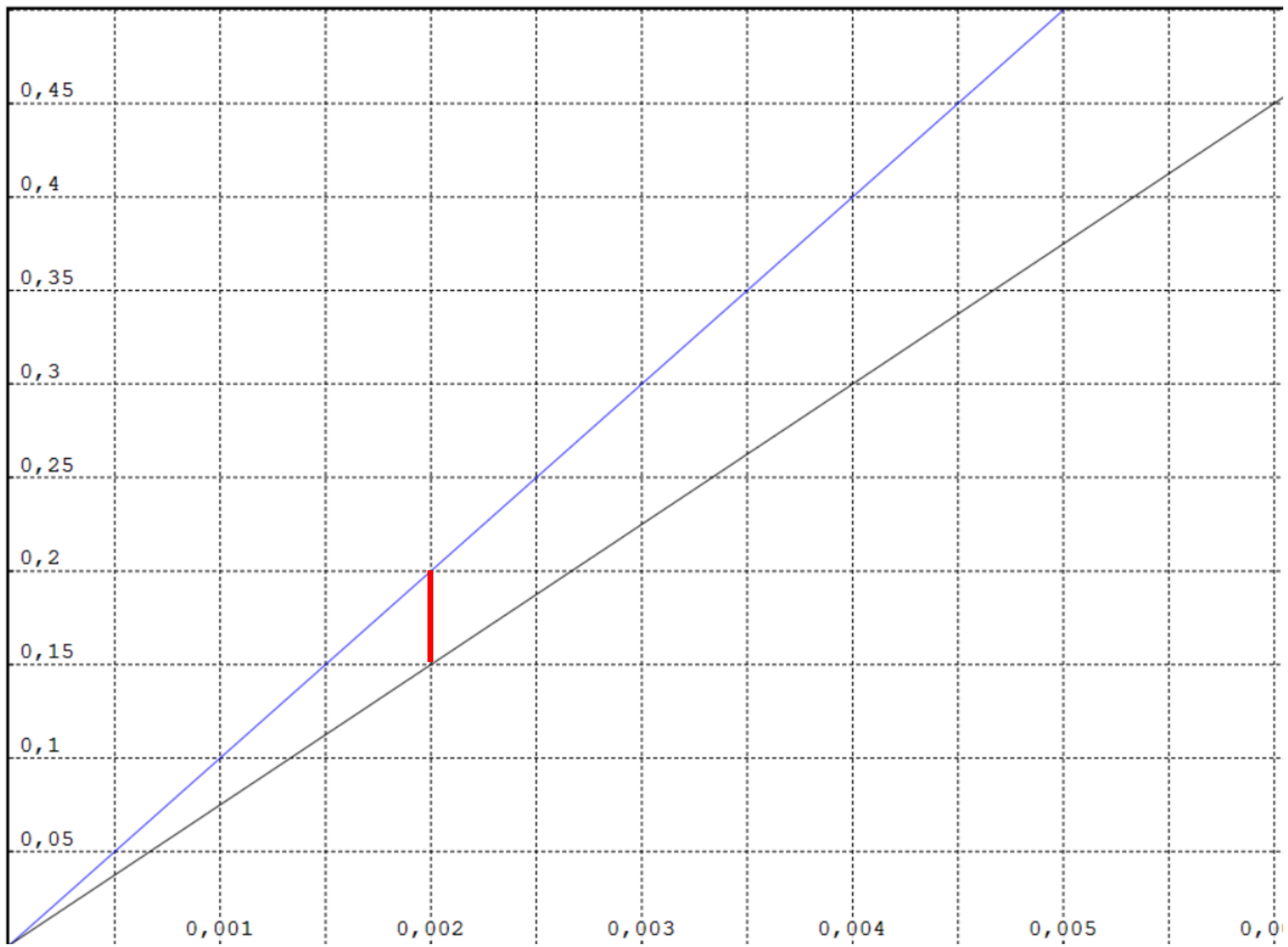
Position				Distance				Écart	
Durée (s)	Guépard	Antilope		Durée (s)	Guépard	Antilope		Durée (s)	
1	27,78	70,83		1	27,78	20,83		1	43,06
2	55,56	91,67		2	55,56	41,67		2	36,11
3	83,33	112,50		3	83,33	62,50		3	29,17
4	111,11	133,33		4	111,11	83,33		4	22,22
5	138,89	154,17		5	138,89	104,17		5	15,28
6	166,67	175,00		6	166,67	125,00		6	8,33
7	194,44	195,83		7	194,44	145,83		7	1,39
7,1	197,22	197,92		7,1	197,22	147,92		7,1	0,69
7,2	200,00	200,00		7,2	200,00	150,00		7,2	0,00
7,3	202,78	202,08		7,3	202,78	152,08		7,3	-0,69
7,4	205,56	204,17		7,4	205,56	154,17		7,4	-1,39
7,5	208,33	206,25		7,5	208,33	156,25		7,5	-2,08
7,6	211,11	208,33		7,6	211,11	158,33		7,6	-2,78
7,7	213,89	210,42		7,7	213,89	160,42		7,7	-3,47
7,8	216,67	212,50		7,8	216,67	162,50		7,8	-4,17
7,9	219,44	214,58		7,9	219,44	164,58		7,9	-4,86
8	222,22	216,67		8	222,22	166,67		8	-5,56

Résolution graphique de l’équation



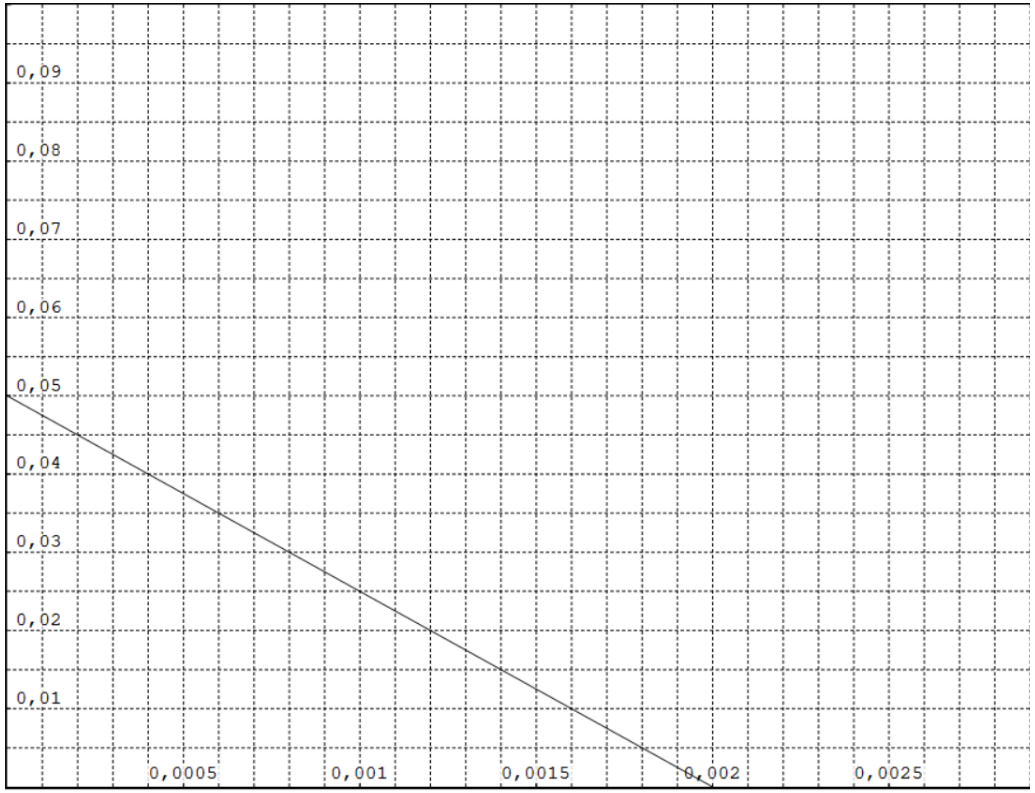
Position

Résolution graphique de l’équation



Distance parcourue

Résolution graphique de l’équation



Écart entre
les animaux

Comparaison des procédures

- Quelle interprétation parmi celle en terme de positions, celle en termes de distances parcourues et celle en terme d’écart entre les animaux est la plus intelligible ?

- L’interprétation en termes d’écart entre les animaux permet un contournement de la mise en équation et l’utilisation des propriétés de la proportionnalité.

Différenciation :

- Imposer l’une des interprétations (position, distance, écart) en proposant des questions intermédiaires.
- Suggérer la droite graduée pour représenter la situation en termes de positions.
- Suggérer une première fenêtre d’affichage pour les résolutions graphiques.
- Suggérer un premier intervalle pour les résolutions numériques.

T.I.C.E.

- Tableur : la résolution numérique nécessite l’établissement d’une ou deux formules et de nombreux balayages.
- Grapheur : la résolution graphique nécessite l’établissement d’une ou deux expressions algébriques et de nombreux zooms.
- Scratch : représenter la situation de manière dynamique

Synthèse

- Pour déterminer la distance parcourue par le guépard pour rattraper l'antilope nous avons calculé la durée de sa course en raisonnant sur les **positions** (abscisses d'une droite graduée), ou sur les **distances parcourues** par les deux animaux ou sur l'**écart** entre les animaux.
- Nous avons modélisé la situation par une équation que nous avons résolue (algébriquement, graphiquement ou numériquement).
- La vision en termes d'écart nous a permis d'utiliser les propriétés de la proportionnalité.

Prolongement(s)

- *Un train quitte Londres pour Édimbourg à 01 h 00, roulant à 50 miles à l'heure. Un autre train quitte Édimbourg pour Londres à 04 h 00, roulant à 25 miles à l'heure. Sachant que Édimbourg est à 400 miles de Londres, à quelle heure se rencontreront-ils ?*
- *Sur un circuit automobile, deux voitures peuvent encore prétendre à la victoire. La voiture n°1 est en tête ; soudain à 10 km de l'arrivée, elle connaît un ennui technique et on demande au pilote de maintenir sa vitesse à 160 km/h. La voiture n°6 est à sa poursuite ; elle roule à 180 km/h. Quelles sont les distances possibles qui peuvent séparer les deux voitures au moment de l'incident si la voiture n°6 veut espérer gagner ce Grand Prix ?*
- *Trois motocyclistes ont pris ensemble le départ d'une course sur un circuit. Le second, dont la vitesse moyenne était inférieure de 7,5 kilomètres à l'heure à celle du premier et supérieure de 4,5 kilomètres à l'heure à celle du troisième, est arrivé 6 minutes après le premier et 4 minutes avant le troisième. Déterminer la longueur du parcours, la vitesse moyenne de chaque coureur et le temps mis par chacun pour effectuer le parcours.*